

# Grundbegriffe der Informatik

## Musterlösung zu Aufgabenblatt 13

### Aufgabe 13.1 (1 Punkt)

Wieviele Jahre alt war Kurt Gödel, als er starb?

71 Jahre.

### Aufgabe 13.2 (2+2+2 Punkte)

- a) Gegeben seien eine Turingmaschine  $T = (Z, z_0, X, f, g, m)$  sowie ein Wort  $w \in (X \setminus \{\square\})^*$ . Geben Sie eine Turingmaschine  $T'$  an, so dass gilt:  
 $T'$  hält bei Eingabe des leeren Wortes genau dann an, falls  $T$  bei Eingabe von  $w$  anhält.

Idee:  $T'$  schreibt zuerst das Wort  $w$  auf das leere Band und simuliert danach  $T$ .

Sei  $W = \{v \mid \exists u \in X^* : w = uv\}$

Sei  $Z' = \{z_v \mid v \in W\} \cup r$  eine zu  $Z$  disjunkte Menge.

Dann sei  $T' = (Z' \cup Z, z_w, X, F', g', m')$  die gesuchte Turingmaschine mit:

$$\forall x \in X : \forall v \in W : \forall y \in X : f'(z_{xv}, y) = z_v, g'(z_{xv}, y) = x, m'(z_{xv}, y) = 1,$$

$$\forall y \in X : f'(z_\epsilon, y) = r, g'(z_\epsilon, y) = y, m'(z_\epsilon, y) = -1$$

$$\forall y \in X \setminus \{\square\} : f'(r, y) = r, g'(r, y) = y, m'(r, y) = -1$$

$$f'(r, \square) = z_0, g'(r, \square) = \square, m'(r, \square) = 1$$

$$\forall z \in Z : \forall x \in X : f'(z, x) = f(z, x), g'(z, x) = g(z, x), m'(z, x) = m(z, x)$$

- b) Skizzieren Sie einen Algorithmus (unter Zuhilfenahme von Teilaufgabe a)), wie man die formale Sprache  $H$  des Halteproblems entscheiden könnte, falls es eine Turingmaschine  $E$  gäbe, die bei Eingabe der Codierung einer Turingmaschine  $T$  entscheidet, ob  $T$  bei Eingabe des leeren Wortes hält oder nicht.

Wie in Teilaufgabe a) angegeben konstruiert man für die Turingmaschine  $T$ , die durch das Wort  $w$  codiert wird, eine Turingmaschine  $T'$ , die zuerst  $w$  auf das Band schreibt und dann  $T$  simuliert.

Falls es eine Turingmaschine  $E$  wie gefordert geben würde, könnte  $E$  bei Eingabe der Codierung von  $T'$  entscheiden, ob  $T'$  bei Eingabe des leeren Wortes hält, was genau dann der Fall ist, wenn  $T$  bei Eingabe der Codierung von  $w$  hält.

Damit könnte man das Halteproblem algorithmisch entscheiden, was jedoch nicht möglich ist.

Also muss die Annahme, dass so eine Turingmaschine  $E$  existiert, falsch sein.

- c) Skizzieren Sie einen Algorithmus, wie man die Funktion  $\mathbf{bb}$  in endlicher Zeit berechnen könnte, falls es eine Turingmaschine  $E$  gäbe, die bei Eingabe der Codierung einer Turingmaschine  $T$  entscheidet, ob  $T$  bei Eingabe des leeren Wortes hält oder nicht.

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  gibt es jeweils nur endlich viele Turingmaschinen mit Zustandsmenge  $\{0, \dots, n-1\}$  und Bandalphabet  $\{\square, 1\}$ .

Gäbe es eine Turingmaschine  $E$  mit der geforderten Eigenschaft, könnte man zuerst in endlicher Zeit für alle Turingmaschinen mit  $n$  Zuständen feststellen, ob diese bei Eingabe des leeren Wortes halten oder nicht.

Danach kann man jede der haltenden Turingmaschinen in endlicher Zeit simulieren und am Ende zählen, wie viele Einsen auf dem Band stehen.

Schließlich findet man  $\mathbf{bb}(n)$  als die größte dieser endlich vielen Anzahlen.

### Aufgabe 13.3 (2+3+2 Punkte)

Die Funktion  $A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{N}_0 : A(0, y) &= y + 1 \\ \forall x \in \mathbb{N}_0 : A(x + 1, 0) &= A(x, 1) \\ \forall x, y \in \mathbb{N}_0 : A(x + 1, y + 1) &= A(x, A(x + 1, y)) \end{aligned}$$

- a) Begründen Sie, warum  $A(x, y)$  für alle natürlichen Zahlen  $x$  und  $y$  definiert ist.

Wir zeigen durch Induktion über  $x \in \mathbb{N}_0$ :

$\forall y \in \mathbb{N}_0 : A(x, y)$  ist definiert.

**Induktionsanfang:**  $x = 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{N}_0 : A(x, y) = y + 1$  ist definiert (durch die erste Zeile der Definition).

**Induktionsvoraussetzung I:** Für beliebiges, aber festes  $x \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$\forall y \in \mathbb{N}_0 : A(x, y)$  ist definiert.

**Induktionsschluss:** Wir zeigen, dass dann auch für  $x + 1$  gilt:  $\forall y \in \mathbb{N}_0 : A(x + 1, y)$  ist definiert.

Dies zeigen wir **wieder** durch Induktion, diesmal über  $y$ :

**Induktionsanfang:**  $y = 0 \Rightarrow A(x + 1, y) = A(x + 1, 0) = A(x, 1)$  definiert nach Induktionsvoraussetzung I.

**Induktionsvoraussetzung II:** Für beliebiges, aber festes  $y \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$A(x + 1, y)$  ist definiert.

**Induktionsschluss:** Wir zeigen, dass dann auch für  $y + 1$  gilt:  $A(x + 1, y + 1)$  ist definiert.

Nach Definition gilt  $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$ .

Nach Induktionsvoraussetzung II gilt  $A(x + 1, y)$  ist definiert; damit ist nach Induktionsvoraussetzung I auch  $A(x, A(x + 1, y))$  definiert.

- b) Geben Sie geschlossene Formeln an für  $A(1, y)$ ,  $A(2, y)$  und  $A(3, y)$ .

$$A(1, 0) = A(0, 1) = 2, A(1, y + 1) = A(0, A(1, y)) = A(1, y) + 1$$

Damit folgt:  $A(1, y) = 2 + y$ .

$$A(2, 0) = A(1, 1) = 2 + 1 = 3, A(2, y + 1) = A(1, A(2, y)) = 2 + A(2, y)$$

Damit folgt:  $A(2, y) = 3 + 2y$ .

$A(3, 0) = A(2, 1) = 3 + 2 \cdot 1 = 5$ ,  $A(3, y + 1) = A(2, A(3, y)) = 3 + 2A(3, y)$   
 Die Ergebnisse sind  $A(3, 0) = 5$ ,  $A(3, 1) = 13$ ,  $A(3, 2) = 29$ ,  $A(4, 2) = 61$ , welche  
 immer um 3 kleiner sind als die Zweierpotenzen 8, 16, 32, 64.  
 Dies bringt einen zur Formel  $A(3, y) = 2^{y+3} - 3$ .

c) Beweisen Sie Ihre Formel für  $A(1, y)$  durch vollständige Induktion.

**Induktionsanfang:**  $A(1, 0) = A(0, 1) = 1 + 1 = 2 = 2 + 0 \checkmark$

**Induktionsvoraussetzung:** Für ein beliebiges, aber festes  $y \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $A(1, y) = 2 + y$ .

**Induktionsschluss:** Wir zeigen, dass dann auch gilt  $A(1, y + 1) = 2 + (y + 1)$ :  
 $A(1, y + 1) = A(0, A(1, y)) = A(1, y) + 1 \stackrel{IV}{=} 2 + y + 1 \checkmark$ .

### Aufgabe 13.4 (2+3 Punkte)

a) Geben Sie eine Relation  $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  an, die symmetrisch und transitiv ist, aber keine Äquivalenzrelation.

Wir definieren  $R = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ .

Diese Relation ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv, da  $(0, 0) \notin R$  gilt; somit ist  $R$  keine Äquivalenzrelation.

b) Die Relation  $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  sei gegeben durch:

$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : (n, m) \in R \iff$  der größte gemeinsame Teiler von  $n$  und  $m$  ist eine Primzahl.

Zeigen Sie, dass  $R$  symmetrisch ist, aber weder transitiv noch reflexiv.

$R$  symmetrisch:  $\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : xRy \Rightarrow \text{ggT}(x, y) \text{ ist Primzahl} \Rightarrow \text{ggT}(y, x) \text{ ist Primzahl} \Rightarrow yRx$ .

$R$  nicht transitiv:  $\text{ggT}(4, 6) = 2 \Rightarrow 4R6$ ,  $\text{ggT}(6, 8) = 2 \Rightarrow 6R8$ , aber  $4R8$  gilt nicht, da  $\text{ggT}(4, 8) = 4$  keine Primzahl ist.

$R$  nicht reflexiv:  $\text{ggT}(4, 4) = 4$  ist keine Primzahl, somit gilt  $(4, 4) \notin R$ .